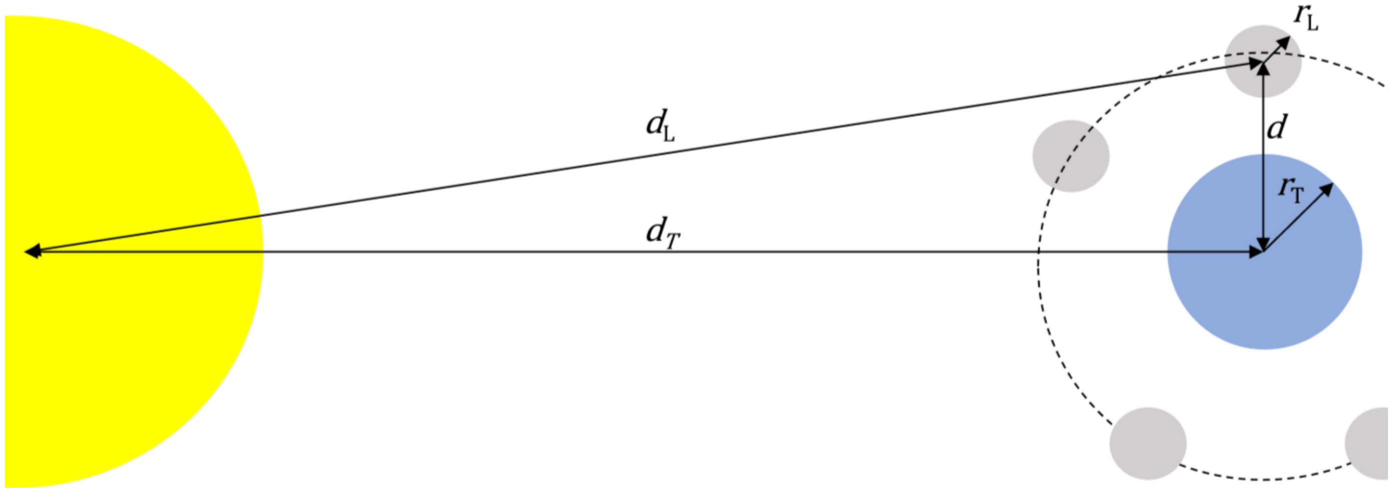
1

Assumir que estamos a falar da superfície da Lua que está virada para o Sol (a Lua gira sobre si própria em relação ao Sol uma vez por mês).



Como o raio da órbita da Lua à volta da terra (d) é uma distância muito menor que a órbita da Terra à volta do Sol (d_T), a distância que a Lua está do sol d_L é igual ao valor da órbita da Terra.

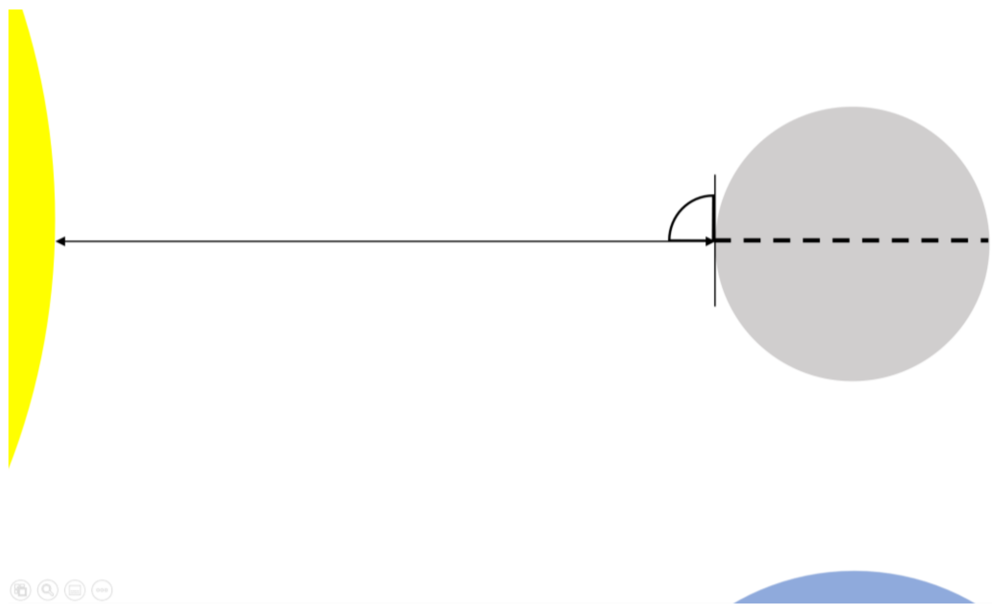
$$d_T >> d$$
$$\therefore d_T = d_L$$

A está distância sabemos que a radiação solar interplanetária tem um valor de:

$$S_0 = 1366\,\mathrm{W/m^2}$$

Este é o valor de radiação que consideram que chega ao topo da atmosfera da Terra. Ou seja, este é o valor da radiação que chega à Lua.

Na pergunta não está definida o ângulo de incidência da radiação sobre o solo da Lua em questão. Como tal, vamos assumir que estamos no equador da Lua, ou seja, o ângulo de incidência da radiação solar é perpendicular.



Sabendo o valor da radiação solar interplanetária na órbita da Terra e Lua, e assumindo que estamos no equador da Lua, e sabendo que Lua não tem atmosfera, podemos concluir que a radiação incidente na superfície da Lua é de:

$$S_0 = 1366\,\mathrm{W/m^2} = G\,.$$

Para obter a temperatura de emissão, precisamos de saber qual a potência de emissão da superfície da Lua. Temos de assumir que a superfície da Lua em questão está em equilíbrio térmico, ou seja, não está a mudar de temperatura, ou seja a toda a potência absorvida (G_{abs}) é igual à potência emitida (E_{L}).

$$G_{\mathrm{abs}} = E_{\mathrm{L}}$$

Tendo o albedo da superfície da Lua, $A = 0.12$ podemos calcular radiação absorvida.

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{abs}} &= G(1-A) \\ &= 1366\,\mathrm{W/m^2} \times (1-0.12) \\ G_{\mathrm{abs}} &= 1202\,\mathrm{W/m^2} \end{aligned}$$

Ou seja, a potência de emissão da superfície da Lua é:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{abs}} &= E_{\mathrm{L}} \\ G_{\mathrm{abs}} &= 1202\,\mathrm{W/m^2} \\ \therefore E_{\mathrm{L}} &= 1202\,\mathrm{W/m^2} \end{aligned}$$

Assumindo que a emissividade da superfície da Lua é similar ao seu albedo, podemos calcular a temperatura de emissão a partir da equação de Stefan-Boltzmann.

Começamos com a equação Stefan-Boltzmann e aplicamos a relação de albedo e emissividade:

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon\sigma T^4 \\ \varepsilon &= 1-A \end{aligned}$$

$$E = (1-A)\sigma T^4$$

Sabendo que potência de emissão tem de ser igual à potência absorvida, e assim utilizando a expressão para a potência absorvida temos uma expressão para a potência de emissão em função da potência incidente e o albedo:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{abs}} &= E_{\mathrm{L}} \\ G_{\mathrm{abs}} &= G(1-A) \end{aligned}$$

$$E_{\mathrm{L}} = G(1-A)$$

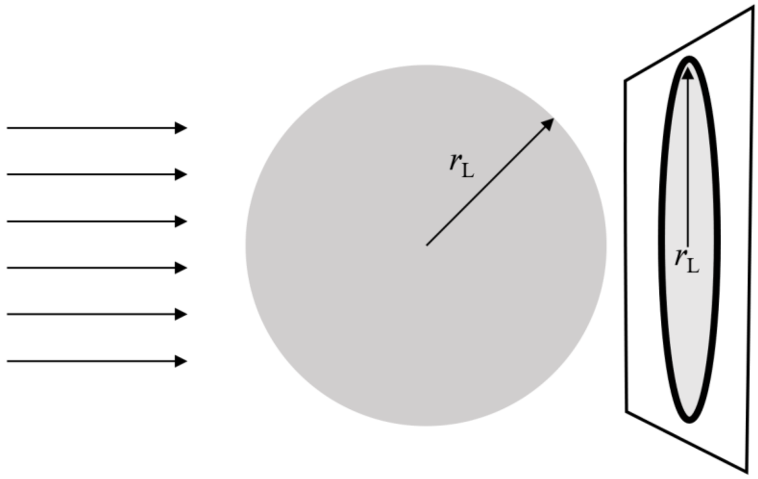
Como já temos duas expressões para a potência de emissão, podemos calcular:

$$E = (1 - A)\sigma T^4$$
$$E_L = G(1 - A)$$

$$\cancel{(1 - A)}\sigma T^4 = G\cancel{(1 - A)}$$
$$\sigma T^4 = G$$
$$T = \sqrt[4]{\frac{G}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1366\mathrm{Wm^{-2}}}{5.67 \times 10^{-8}\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}}} = 394\mathrm{K} = 121^\circ\mathrm{C}$$

Está é a temperatura máxima que a superfície da Lua chega em zonas do equador que estejam viradas para o Sol.

Para os alunos que estiveram atentos às aulas, vão perceber que o que pergunta efectivamente pede é *temperatura de emissão* da lua. Primeiro temos de perceber qual é a potência total absorvida pela lua. Já sabemos qual o fluxo de radiação solar interplanetário. A esfera da Lua projecta uma sombra em disco, e é este disco que nos indica qual a total potência de radiação que incidente na superfície da Lua.



A área do disco de sombra projectada pela Lua é:

$$a_P = \pi r_L^2$$
$$r_L = 1737\mathrm{km} = 1.737 \times 10^6\mathrm{m}$$
$$a_P = \pi\left(1.737 \times 10^6\mathrm{m}\right)^2 = 5.9 \times 10^{12}\mathrm{m}^2$$

Ou seja, a potência absorvida pela Lua é definida pela área do disco e a potência de radiação incidente:

$$P_{abs} = a_P S_0 (1 - A)$$
$$= 5.9 \times 10^{12}\mathrm{m}^2 \times 1366\,\mathrm{W/m^2}(1 - 0.12)$$
$$= 7.1 \times 10^{15}\,\mathrm{W}$$

A temperatura de emissão é definida com a temperatura que a superfície teria se fosse um corpo negro (ver aulas teóricas). Ou seja, para calculara temperatura de emissão, a emissividade da superfície não é tida em conta, assume-se que tem o valor de 1.

A Lua está em equilíbrio térmico, não está a aquecer nem a arrefecer. Portanto, a potência (P_e) de emissão terá de ser igual á potência absorvida (P_{abs}).

No entanto, o tamanho da superfície emissora é a da esfera da Lua, ou seja, a área de emissão é de:

$$a_e = 4\pi r_L^{\ 2}$$
$$r_L = 1737\text{km} = 1.737\times10^6\text{m}$$
$$a_e = 4\pi\left(1.737\times10^6\text{m}\right)^2 = 2.36\times10^{13}\text{m}^2$$

A potência de emissão da Lua (P_e) é em função da densidade de potência de emissão (E_L) e a sua área total:

$$P_e = a_L E_L$$
$$E_L = \varepsilon\sigma T_e^{\ 4}$$

$$\therefore P_e = a_L \sigma T_e^{\ 4}$$

Já temos duas expressões para a potência de emissão da Lua, podemos calcular a temperatura de emissão:

$$P_e = a_L \sigma T_e^{\ 4}$$
$$P_e = P_{abs}$$
$$P_{abs} = a_P S_0 \left(1-A\right)$$

$$\therefore P_e = a_P S_0 \left(1-A\right)$$
$$\therefore a_L \sigma T_e^{\ 4} = a_P S_0 \left(1-A\right)$$

$$T_e = \frac{a_P S_0 \left(1-A\right)}{a_L \sigma}$$

$$a_P = \pi r_L^{\ 2}$$
$$a_L = 4\pi r_L^{\ 2}$$

$$\therefore T_e = \sqrt[4]{\frac{\cancel{\pi r_L^{\ 2}}\, S_0\left(1-A\right)}{4\,\cancel{\pi r_L^{\ 2}}\,\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{S_0\left(1-A\right)}{4\sigma}}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{1366\,\text{W/m}^2\left(1-0.12\right)}{4\times5.67\times10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}}} = 270\text{K}$$

2

Antes de abordar a pergunta, vamos demonstrar como se pode calcular a potência da radiação solar que chega à terra.

Sabendo que a temperatura da superfície do Sol é de 5800 K (já devem saber como sabemos este facto), podemos calcular a potência de emissão do Sol.

Primeiro a densidade de potência de emissão do Sol:

$$P_\mathrm{S} = \sigma T_\mathrm{S}^{\,4}$$
$$T_\mathrm{S} = 5800\mathrm{K}$$

$$\therefore P_\mathrm{S} = 5.67\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}\times(5800\mathrm{K})^4$$
$$= 6.42\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}}$$

Podemos agora obter a potência de emissão do Sol, sabendo o seu raio e assim a sua área superficial:

$$a_\mathrm{S} = 4\pi r_\mathrm{S}^{\,2}$$
$$r_\mathrm{S} = 696{,}000\mathrm{km} = 6.96\times10^{8}\,\mathrm{m}$$

$$\therefore a_\mathrm{S} = 6.09\times10^{18}\,\mathrm{m}^2$$

$$P_\mathrm{S,tot} = a_\mathrm{S} P_\mathrm{S}$$
$$P_\mathrm{S} = 6.42\times10^{8}\,\mathrm{Wm^{-2}}$$

$$\therefore P_\mathrm{S,tot} = 6.09\times10^{18}\,\mathrm{m}^2\times6.42\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}}$$
$$= 3.91\times10^{26}\,\mathrm{W}$$

À distância que a Terra está do Sol, o Sol pode ser considerado como fonte pontual. Ou seja, a potencia interceptada por uma superfície a uma distância r, decai inversamente ao quadrado da distância. No entanto, isto é verdade porque toda a potência de radiação emitida pelo Sol tem de atravessar a superfície de uma esfera definida por um raio. Quanto maior o raio, maior a área superficial da esfera, e assim maior a diluição da potência *S* nessa superfície que tem um raio *d* (distância entre o Sol e a superfície da esfera).

$$S = \frac{P_\mathrm{S,tot}}{4\pi d^2}$$

Para a Terra:

$$d_\mathrm{earth} = 1.50\times10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$S_\mathrm{earth} = \frac{P_\mathrm{S,tot}}{4\pi d_\mathrm{earth}^{\;2}}$$
$$P_\mathrm{S,tot} = 3.91\times10^{26}\,\mathrm{W}$$

$$\therefore S_\mathrm{earth} = \frac{3.91\times10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi\left(1.50\times10^{11}\,\mathrm{m}\right)^2}$$
$$= 1380\mathrm{Wm^{-2}}$$

Tendo em consideração erros de arredondamento, estamos muito próximos do constante solar de 1366 Wm^{-2}, com um erro de 1%.

Vamos agora seguir o raciocínio sem valores, para ver a expressão que obtemos no fim.

$$P_S = \sigma T_S^4$$

$$P_{S,tot} = a_S P_S$$
$$a_S = 4\pi r_S^2$$

$$\therefore P_{S,tot} = 4\pi r_S^2 \sigma T_S^4$$

$$S = \frac{P_{S,tot}}{4\pi d^2}$$
$$\therefore S = \frac{r_S^2 \sigma T_S^4}{d^2}$$

E agora com valores:

$$r_S = 6.96\times10^8\,\mathrm{m}$$
$$T_S = 5800\mathrm{K}$$
$$d_{\mathrm{earth}} = 1.50\times10^{11}\,\mathrm{m}$$

$$\therefore S_{\mathrm{earth}} = \frac{\left(6.96\times10^8\,\mathrm{m}\right)^2 5.67\times10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}\times\left(5800\mathrm{K}\right)^4}{\left(1.50\times10^{11}\,\mathrm{m}\right)^2}$$
$$= 1380\mathrm{Wm^{-2}}$$

No caso da Terra, e assumindo que não tem atmosfera, podemos calcular a temperatura de emissão, seguindo o mesmo raciocínio similar da pergunta 1. A Terra tem um albedo de $A_{\mathrm{earth}} = 0.3$.

A Terra está em equilíbrio térmico, portanto a potência absorvida pela superfície tem de ser igual à potência emitida pela superfície.

$$P_e = P_{abs}$$

$$P_e = \sigma T_e^4$$
$$P_{abs} = S\left(1-A\right)$$

No entanto, a Terra não é um disco, mas sim uma esfera. Ou seja, a potência absorvida é equivalente de um disco com o mesmo diâmetro que a esfera, mas a potência emitida é da área da esfera. Ou seja, sabendo que o rácio entre a área superficial de um disco e de uma esfera e de ¼, a potência absorvida é ¼ e, portanto, temos de reescrever a expressão de cima tomando isto em conta.

$$P_{\mathrm{e}} = P_{\mathrm{abs}}$$

$$P_{\mathrm{e}} = \sigma T_{\mathrm{e}}^{4}$$

$$P_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{4} S\left(1-A\right)$$

Como já temos uma expressão para a densidade de potência de radiação a uma distância d do Sol

$$S = \frac{r_{\mathrm{S}}^{2}\sigma T_{\mathrm{S}}^{4}}{d^{2}}$$

A potência absorvida é:

$$P_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{4} S\left(1-A\right)$$

$$S = \frac{r_{\mathrm{S}}^{2}\sigma T_{\mathrm{S}}^{4}}{d^{2}}$$

$$\because S = \frac{1}{4}\left(1-A\right)\frac{r_{\mathrm{S}}^{2}\sigma T_{\mathrm{S}}^{4}}{d^{2}}$$

Podemos igualar as expressões equivalentes:

$$P_{\mathrm{e}} = P_{\mathrm{abs}}$$

$$P_{\mathrm{e}} = \sigma T_{\mathrm{e}}^{4}$$

$$P_{\mathrm{abs}} = S = \frac{1}{4}\left(1-A\right)\frac{r_{\mathrm{S}}^{2}\sigma T_{\mathrm{S}}^{4}}{d^{2}}$$

$$\therefore \cancel{\sigma} T_{\mathrm{e}}^{4} = \frac{1}{4}\left(1-A\right)\frac{r_{\mathrm{S}}^{2}\cancel{\sigma} T_{\mathrm{S}}^{4}}{d^{2}}$$

$$T_{\mathrm{e}}^{4} = \frac{1}{4}\frac{r_{\mathrm{S}}^{2}}{d^{2}}\left(1-A\right)T_{\mathrm{S}}^{4}$$

$$T_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{S}}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{r_{\mathrm{S}}}{d}}\sqrt[4]{\left(1-A\right)}$$

Esta expressão permite calcular a temperatura de emissão de um planeta, assumindo que este não tem atmosfera que absorva radiação incidente e/ou reflita ou absorba radiação emitida pela superfície.

Utilizando os valores tabulados podemos calcular a temperatura de emissão para todos os planetas na tabela:

	Jupiter	Venus	Mars	Earth
raio do Sol	6.96×10^{8} m			
Distância do Sol	7.80×10^{11} m	1.08×10^{11} m	2.28×10^{11} m	1.50×10^{11} m
albedo	0.73	0.75	0.15	0.30
T_{e}	88	233	217	256
Medido T_{e}	130	700	220	288

A temperatura medida de Júpiter é superior à sua temperatura estimada. Para Vénus é bastante superior. Para Marte a diferença e nula. Para a Terra a medida é superior.

A origem da temperatura superior para Júpiter é outra.

Vénus tem uma atmosfera muito densa composta maioritariamente por CO_2. Portanto, o efeito de estufa é bastante forte.

Marte quase não tem atmosfera, mas a que tem é composta de CO_2. No entanto, não é o suficiente para causar um efeito de estufa relevante.

A Terra, explicado nas aulas T.

3

Começar com o sistema de equações em forma de matrizes dada nas T.

$$\begin{bmatrix} -1 & \varepsilon_1 & (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_s^4 \\ T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ H_L - H_S \\ -H_L \end{bmatrix}$$

De modo a simplificar, utilizamos a mesma notação que nas aulas T.

Superfície, S; camada de nuvens, 1, camada de aerossóis, 2.

Queremos encontrar o albedo α. Vemos que do sistema de equações podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} -1 & \varepsilon_1 & (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & 2\varepsilon_1 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_s^4 \\ T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{bmatrix} H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha) \\ H_L - H_S \\ -H_L \end{bmatrix}$$

De seguida percebemos que temos só uma equação que contem o albedo:

$$\left(-1, \varepsilon_1, (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2\right) \cdot \left(T_s^4, T_1^4, T_2^4\right) = \frac{1}{\sigma}\left(H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha)\right)$$

Ou seja:

$$-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + (1-\varepsilon_1)\varepsilon_2 T_2^4 = \frac{1}{\sigma}\left(H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha)\right)$$

Agora é só uma questão de "dar à manivela":

$$-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4 = \frac{1}{\sigma}\left(H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha)\right)$$

$$\sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right) = H_S - \frac{S_0}{4}(1-\alpha)$$

$$\sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right) - H_S = -\frac{S_0}{4}(1-\alpha)$$

$$H_S - \sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right) = \frac{S_0}{4}(1-\alpha)$$

$$\frac{4}{S_0}\left[H_S - \sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right)\right] = 1-\alpha$$

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0}\left[H_S - \sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right)\right]$$

Aplicamos a condição dos albedos:

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0}\left[H_S - \sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4 - \varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4\right)\right]$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 = 1 - \rho_1 = 1 - A_1$$
$$\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \rho_2 = 1 - A_2$$
$$A_1 \gg A_2$$
$$\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$$
$$0 < \varepsilon < 1$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 T_2^4 \ll \varepsilon_2 T_2^4$$

$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0}\left[H_S - \sigma\left(-T_s^4 + \varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 T_2^4\right)\right]$$
$$\alpha = 1 - \frac{4}{S_0}\left[H_S - \sigma\left(-T_s^4 + (1 - A_1)T_1^4 + (1 - A_2)T_2^4\right)\right]$$

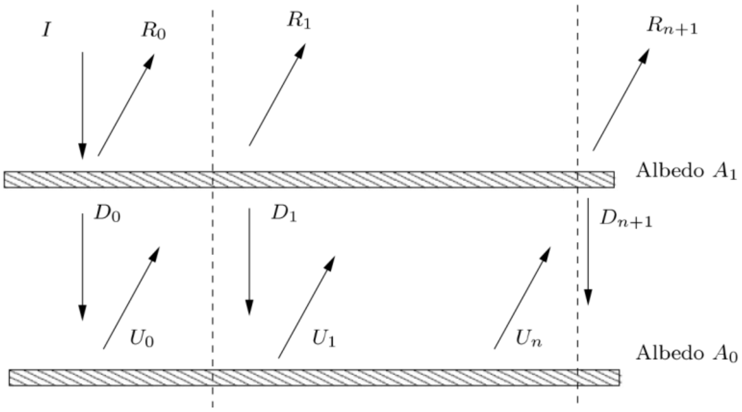
Como não temos informação de como as temperaturas se comparam, $T_1 \ll T_2$ não podemos simplificar mais.

Podemos analisar a pergunta a partir de outro ponto de vista, utilizando a ideia de múltiplas reflexões. Aqui vamos utilizar a mesma notação encontrada no enunciado. Veremos que isto facilita na elaboração das equações: camada de nuvens, 0, camada de aerossóis, 1.

Temos:

- radiação *I* incidente sobre a atmosfera;
- *R* é a radiação que é reflectida de volta ao espaço;
- *D* é a radiação que transmitida através da primeira camada aerossóis (camada 1) para a camada de nuvens (camada 0); e,
- *U* é a radiação que é reflectida a partir da camada de nuvens de volta para a camada de aerossóis.
- *n* indica número reflecções a partir da camada de nuvens sofridas pela radiação.

Ou seja, visualizando esta construção na figura abaixo:



R_0 é radiação que é reflectida pela primeira camada, ou seja, esta radiação nunca atravessou a camada de aerossóis, simplesmente sofreu uma primeira reflecção.

D_0 é primeira radiação que é transmitida através da camada 1. Assumindo que não existe absorção de radiação, temos:

$$D_0 + R_0 = I$$

Tendo em conta os albedos, a primeira reflecção é:

$$R_0 = A_1 I$$

Como $A_0 >> A_1$ podemos negligenciar esta primeira reflecção.

E primeira radiação transmitida através a camada de aerossóis (camada 1) é:

$$D_0 = (1 - A_1)I$$

E primeira radiação reflectida a partir da camada de nuvens é, portanto:

$$U_0 = A_0 D_0$$
$$\because D_0 = (1 - A_1)I$$

$$U_0 = A_0(1 - A_1)I$$

A radiação U_0 que volta para a camada de aerossóis, parte dela vai ser reflectida de volta para a camada de nuvens:

$$D_1 = A_1 U_0$$
$$\because U_0 = A_0(1 - A_1)I$$

$$D_1 = A_1 A_0 (1 - A_1)I$$

A outra parte desta radiação atravessa a camada de aerossóis de volta para espaço:

$$R_1 = (1 - A_1)U_0$$
$$\because U_0 = A_0(1 - A_1)I$$

$$\begin{aligned} R_1 &= (1 - A_1)A_0(1 - A_1)I \\ &= A_0(1 - A_1)^2 I \end{aligned}$$

A radiação D_1 que volta de novo para a camada de nuvens sofre novamente uma reflecção:

$$U_1 = A_0 D_1$$
$$\because D_1 = A_1 U_0$$

$$U_1 = A_0 A_1 U_0$$
$$\because U_0 = A_0 D_0$$

$$U_1 = A_0 A_1 A_0 D_0$$

Para melhor compreender o processo iterativo, construímos uma tabela e vamos até n = 2:

n	D_n	U_n	R_n
0	$D_0 = (1-A_1)I$	$U_0 = A_0(1-A_1)I$	$R_0 = A_1 I$
1	$D_1 = A_1 U_0$ $\because U_0 = A_0(1-A_1)I$ $D_1 = A_1 A_0(1-A_1)I$	$U_1 = A_0 D_1$ $\because D_1 = A_1 U_0$ $U_1 = A_0 A_1 U_0$ $\because U_0 = A_0(1-A_1)I$ $U_1 = A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$	$R_1 = (1-A_1)U_0$ $\because U_0 = A_0(1-A_1)I$ $R_1 = (1-A_1)A_0(1-A_1)I$ $R_1 = A_0(1-A_1)^2 I$
2	$D_2 = A_1 U_1$ $\because U_1 = A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $D_2 = A_1 A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $D_2 = (A_1 A_0)^2 (1-A_1)I$	$U_2 = A_0 D_2$ $\because D_2 = A_1 U_1$ $U_2 = A_0 A_1 U_1$ $\because U_1 = A_0 D_1$ $U_2 = A_0 A_1 A_0 D_1$ $\because D_1 = A_1 A_0(1-A_1)I$ $U_2 = A_0 A_1 A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $U_2 = A_0 (A_1 A_0)^2 (1-A_1)I$	$R_2 = (1-A_1)U_1$ $\because U_1 = A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $R_2 = (1-A_1)A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $R_2 = A_0(1-A_1)^2 A_1 A_0 I$
n	$D_0 = (1-A_1)I$ $D_1 = A_1 A_0(1-A_1)I$ $D_2 = (A_1 A_0)^2 (1-A_1)I$ $D_n = (A_1 A_0)^n (1-A_1)I$	$U_0 = A_0(1-A_1)I$ $U_1 = A_0 A_1 A_0(1-A_1)I$ $U_2 = A_0 (A_1 A_0)^2 (1-A_1)I$ $U_n = A_0 (A_1 A_0)^n (1-A_1)I$	$R_0 = A_1 I$ $R_1 = A_0(1-A_1)^2 I$ $R_2 = A_0(1-A_1)^2 A_1 A_0 I$ $n<1$ $R_n = A_0(1-A_1)^2 (A_1 A_0)^{n-1} I$ $R_{n+1} = A_0(1-A_1)^2 (A_1 A_0)^n I$

Podemos agora somar todas as reflecções (que é o componente que necessitamos para calcular o albedo global)

$$R = \sum_{0}^{\infty} R_{\mathrm{n}}$$

$$R = R_0 + \sum_{0}^{\infty} R_{\mathrm{n}+1}$$

$$\because R_0 = A_1 I$$

$$\because R_{\mathrm{n}+1} = A_0\left(1 - A_1\right)^2 \left(A_1 A_0\right)^{\mathrm{n}} I$$

$$R = A_1 I + \sum_{0}^{\infty} A_0\left(1 - A_1\right)^2 \left(A_1 A_0\right)^{\mathrm{n}} I$$

$$= \left[A_1 +_0 \left(1 - A_1\right)^2 \sum_{0}^{\infty} A\left(A_1 A_0\right)^{\mathrm{n}} \right] I$$

Sabendo que temos uma soma do tipo:

$$\sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

Podemos escrever que:

$$R = \left[A_1 + A_0\left(1 - A_1\right)^2 \sum_{1}^{\infty} \left(A_1 A_0\right)^{\mathrm{n}} \right] I$$

$$\because \sum_{0}^{\infty} \left(A_1 A_0\right)^{\mathrm{n}} = \frac{1}{1 - A_1 A_0}$$

$$R = \left[A_1 + \frac{A_0\left(1 - A_1\right)^2}{1 - A_1 A_0} \right] I$$

Assim já temos uma expressão para o albedo global:

$$R = AI$$

$$R = \left[A_1 + \frac{A_0\left(1 - A_1\right)^2}{1 - A_1 A_0} \right] I$$

$$\because A = A_1 + \frac{A_0\left(1 - A_1\right)^2}{1 - A_1 A_0}$$